

## Die Nullstellen der Funktion $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

Vorüberlegung: Multipliziere  $(x^2 - 6x + 8) \cdot (x + 1) =$

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8$$

Eine Nullstellen der Funktion von  $(x^2 - 6x + 8) \cdot (x + 1)$  ist auf jeden Fall schon einmal die -1. Dadurch wird das Produkt Null. Weitere Nullstellen finden wir, wenn wir  $(x^2 - 6x + 8) = 0$  setzen und die pq-Formel anwenden.

Damit haben wir auch schon eine Grundidee, wie wir die Nullstellen von  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  finden können. Wie zerlegen das Polynom so, dass eine Multiplikation entsteht. Dann berechnen wir die Nullstellen wie gehabt.

Um die Nullstellen der Funktion  $x^3 - 5x^2 + 2x + 8$  herauszufinden, geht man in 3 Schritten vor:

**1. Schritt:** Nullstelle „erraten“. Dabei probieren wir durch Einsetzen, ob die Gleichung Null wird. Wir beginnen mit 1

$$1: \quad 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 0$$

$$1 - 5 + 2 + 8 = 0$$

$$6 = 0$$

1 ist also keine Lösung. Probieren wir die (-1)

$$-1: \quad (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 8 = 0$$

$$-1 + 5 - 2 + 8 = 0$$

$$0 = 0$$

- 1 ist also eine Nullstelle.  $N_1(-1|0)$

Natürlich probieren wir nicht ungeordnet, sondern in folgender Reihenfolge: 1, -1, 2, - 2, 3, und -3. Spätestens dann müsste es bei den Aufgaben, die in der Schule gestellt werden, eine Lösung geben.

**2. Schritt:** Nun teilen wir die Funktion:  $(x - (\text{Nullstelle}))$

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 : (x - (-1))$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 5x^2 + 2x + 8 : (x + 1) = \mathbf{x^2 - 6x + 8} \\ - \underline{(x^3 + x^2)} \\ \quad - 6x^2 + 2x \\ \quad - \underline{(-6x^2 - 6x)} \\ \qquad \quad + 8x + 8 \\ \qquad \quad - \underline{(+8x + 8)} \\ \qquad \qquad \qquad \underline{\qquad \qquad \qquad} \end{array}$$

Anmerkung: Teilt man ein Polynom durch  $(x - \text{Nullstelle})$  geht die Division immer auf, es bleibt also kein Rest übrig, wenn man richtig gerechnet hat.

**3. Schritt:** Weiter nun mit  $\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$ , also mit pq-Formel:  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\mathbf{x^2 - 6x + 8 = 0}$$

$$x_{1,2} = -\left(-\frac{6}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{\left(+\frac{36}{4}\right) - 8}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{1}$$

$$x_{1,2} = 3 \pm 1$$

$$x_1 = 3 - 1 = 2 \quad \rightarrow \mathbf{N_3(2|0)}$$

$$x_2 = 3 + 1 = 4 \quad \rightarrow \mathbf{N_4(4|0)}$$

Also die Funktion hat folgende Nullstellen:  **$N_1(-1|0)$ ,  $N_2(2|0)$  und  $N_3(4|0)$**

Übungsaufgabe. Wende die 3 Schritte noch einmal auf die Funktion an. Nimm aber nun als Nullstelle  $x = 2$ .